

MODELOVÁNÍ DYNAMIKY FINANČNÍCH TRHŮ POMOCI SYSTÉMU STOCHASTICKÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Tomáš Sobotka¹

Semestrální práce z předmětu KMA/MM

4. 2. 2014

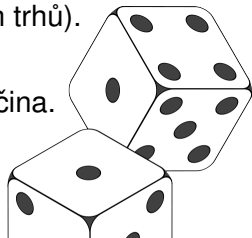
¹sobotkat@kma.zcu.cz

Obsah

- 1 Úvod
 - Motivace I.
 - Motivace II.
- 2 Přehled modelů stochastické volatility
 - Stochastické diferenciální rovnice
 - Vybrané modely dynamiky
- 3 Oceňování evropských opcí
 - Definice kontraktu
 - Férová tržní cena
- 4 Proces kalibrace
 - Optimalizační úloha
 - Výsledky kalibrace na FTSE 100 opce

Dynamika finančních trhů?

- Dynamiku ceny aktiva modelujeme pomocí náhodných procesů (tj. stochastické diferenciální rovnice).
- Na základě námi vybraných modelů nelze zjistit budoucí cenu!
- Pro předpověď se spíše používají metody technické analýzy (× Spor s hypotézou efektivních trhů).
- **Příklad:** Hod kostkou jako náhodná veličina.



K čemu jsou vlastně tyto modely dobré?

- Finanční derivát je kontrakt na podkladový instrument, jehož plnění nastane v předem stanovených časech v budoucnosti.
- Dle finanční teorie, férová cena derivátu závisí na střední hodnotě budoucí ceny.
- Pokud umíme modelovat střední hodnotu aktiva, lze zjistit ceny mimoburzovních derivátů, zjistit expozici portfolia vůči riziku atd...
- **V této práci se pomocí modelů dynamiky pokusíme vysvětlit tržní ceny evropských opcí.**

Itôova stochastická (obyčejná) diferenciální rovnice (SDE)

- Základní tvar Itôovy rovnice vypadá následovně.

$$SDE : \begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \\ X_0, \end{cases}$$

- W_t je standardní Wienerův proces. (Silné) řešení rovnice lze formálně zapsat:

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s}_{\text{Itôův integrál}}.$$

- Více viz KMA/USA, Shreve(2004), libovolná učebnice stochastické analýzy.

Hestonův model

- Dynamiku ceny aktiva S_t modelujeme v rámci Hestonova modelu pomocí soustavy 2 stochastických diferenciálních rovnic.

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}, \quad (1)$$

$$dv_t = -\kappa(v_t - \bar{v})dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{(2)}. \quad (2)$$

- Přírůstky Wienerových procesů jsou korelovány:

$$\mathbb{E}[dW_t^{(1)} dW_t^{(2)}] = \rho dt$$

- Dynamika rozptylu v_t se řídí CIR procesem.
- v_t má deterministickou reverzi k hodnotě parametru \bar{v} s rychlostí κ .

Batesův model

- D. S. Bates vylepšil předchozí model přidáním skokového procesu N_t .
- Modelová dynamika trhu:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} + Y_t S_{t-} dN_t, \quad (3)$$

$$dv_t = -\kappa(v_t - \bar{v})dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{(2)}, \quad (4)$$

- CIR proces v_t zůstává stejný jako v případě Hestonova modelu.
- N_t se implementuje pomocí kompenzovaného složeného Poissonova procesu s intenzitou skoků λ .
- $Y_t S_{t-}$ značí amplitudu skoku v čase t , $Y_t \sim N(\alpha, \gamma)$.

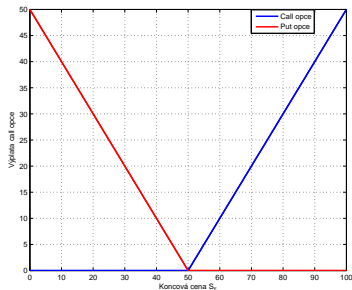
Evropská opce

- Opce dělíme na dva typy:
 - 1 Call opce - právo, nikoliv však povinnost, nakoupit jednotku podkladového aktiva za předem smlouvenou cenu.
 - 2 Put opce - právo, ..., prodat ...
- Parametry kontraktu: K - realizační cena (strike), T - čas vypršení opce (time to maturity).
- Evropská opce má pouze jeden termín expirace T , platí $T > 0$.
- V případě nevýhodnosti opce, právo podeje zůstane nevyužito.

- Výplatní funkce pro call/put opce:

$$f_{call} = \max(S_T - K; 0),$$

$$f_{put} = \max(K - S_T; 0).$$



Závislost ceny opce na modelu dynamiky

- Cenu call opce lze vyjádřit jako diskontovanou střední hodnotu výplatní funkce:

$$C_{call}(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S_T - K; 0)], \quad (5)$$

$$= S_t P_1(S_t, T-t) - e^{-r\tau} K P_2(S_t, T-t). \quad (6)$$

- První výraz v (6) představuje očekávanou hodnotu výplatní funkce za podmínky $f_{call} > 0$, $P_2 = \mathbb{P}(S_T - K > 0)$.
- Pokud známe charakteristickou funkci $\ln(S_T)$, získáme P_1, P_2 z inv. Fourierovy transformace.

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi \ln(K)} F_j(\phi)}{i\phi} \right) d\phi, \quad (7)$$

Kalibrace na opční trh

- Lze si představit jako následující optimalizační úlohu:

$$G(\Theta) = \sum_{i=1}^N w_i |C_i(T_i, K_i) - C^{(m)}(S_t, v_t, r, T_i, K_i, \Theta)|^2;$$
$$\min_{\Theta \in \mathbb{R}^k} G(\Theta). \quad (8)$$

- $C^{(m)}$ je vypočtená cena opce na základě našeho modelu.
- Θ značí množinu parametrů jednotlivých přístupů.
- Váhy w_i definujeme pomocí funkce rozdílu mezi poptávanou a nabízenou cenou i -té opce.

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{|C_i^{Ask} - C_i^{Bid}|}}.$$

Kalibrace na opční trh (pokr.)

- Optimalizační úloha (8) není konvexní.



- Je třeba vhodně zvolit optimalizační proceduru.
- Nejprve minimalizujeme kritérium $G(\Theta)$ globální heuristickou metodou (genetický algoritmus).
- Získané reziduální chyby se pokusíme vylepšit metodou na hledání lokálních optim (trust-region-reflective -funkce `lsqnonlin` v Matlabu).

Posouzení kvality kalibrace

- Kvalitu kalibrace zhodnotíme dle následujících kritérií:

$$AARE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{C_i - C_i^{(m)}}{C_i} \right|,$$

$$MARE = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{C_i - C_i^{(m)}}{C_i} \right|.$$

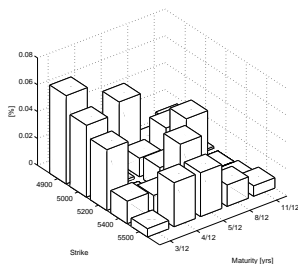
- Kalibraci jsme provedli pro call opce na index FTSE 100.

Porovnání Hestonova a Batesova přístupu.

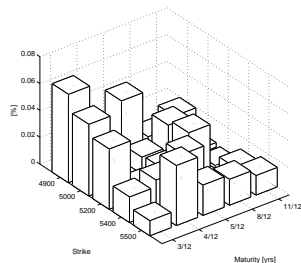
Výsledky globální optimalizace		
	Batesův model	Hestonův model
AARE	2, 20%	2, 30%
MARE	5, 75%	6, 58%

Lokální vylepšení kalibrace		
	Batesův model	Hestonův model
AARE	1, 33%	2, 13%
MARE	2, 96%	6, 57%

Chyby Hestonova modelu

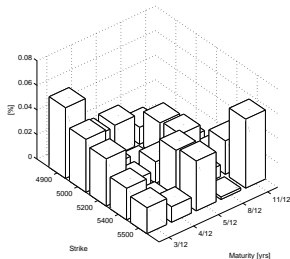


- Globální optimalizace

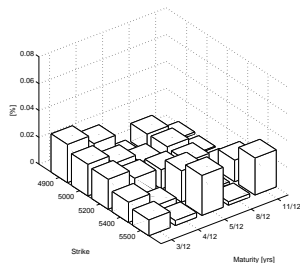


- Lokální vylepšení

Chyby Batesova modelu



- Globální optimalizace



- Lokální vylepšení

Děkuji za pozornost!



BATES, D. S. (1996) Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *Review of Financial Studies*, **9/1**, 69–107.



HESTON, S. L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, **6**, 327–343.



GATHERAL, J. (2006) *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Wiley.



KIENITZ, J. & WETTERAU, D. (2012) *Financial Modelling: Theory, implementation and practice with Matlab code*. Wiley.



SHREVE, S. E. & WETTERAU, D. (2004) *Stochastic Calculus for Finance. II*. Springer-Verlag.

...